



2021.5

ISSN 1004-1176

中学数学月刊

ZHONGXUE SHUXUE YUEKAN



苏州大学
江苏省数学学会

The Monthly Journal of High School Mathematics

中学数学月刊

蘇步青題

主 编 徐稼红
副 主 编 周 超
(下按姓氏笔画为序)
编 委

王金才 王萍萍
丰世富 石志群
祁建新 杨建明
李善良 严亚强
严继高 余红兵
沈琦珉 陆 珺
陈 曦 陈江辉
周 超 夏 炎
钱定边 徐稼红
曹永罗 葛 洵
董林伟 潘洪亮

目 次

特 约 专 稿

高观点指导下的中学数学教学..... 郑毓信(1)

名 师 教 坛

观察·思考·表达

——“利用三角形全等测距离”的教学设计与反思..... 耿恒考(5)

数 学 教 育

大概概念视角下“三角函数的图象与性质”课堂教学设计..... 张海强(8)

初中生数学交流表达能力的认识与培养策略 孙 虎(11)

学习有路“折”为径 思维无涯“探”作舟

——以八年级矩形折叠问题为例 张跃飞(15)

教 材 教 法

聚焦默会知识影响 放大学科育人效应

——以苏科版“黄金分割”教学为例 钱建芬(18)

授人以渔重思考 循循诱之兴味长

——以“函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象”教学为例 姚 婷(20)

不一样的抛物线? 吴小胜(23)

复 习 之 友

2020 年山东卷导数题的探究教学与教学建议

..... 陈香君 赵思林 陈 琼(25)

溯“源”引“流” 挖掘本质 塑造模型

——从 2020 年全国卷解析几何压轴题说起..... 徐 兰(28)

微专题:起于高考,落于素养

——以“两数列公共项问题”为例 朱 伟(32)

走 进 课 堂

立足数学文化 提升课堂品味

——“圆锥曲线之椭圆的定义”教学设计与反思 王瑞琦(34)

实 录 与 反 思

“隐圆问题处理方法研究”的教学实录与反思 吴万征(37)

让学生经历数学概念的生成

——以人教 A 版“函数的概念”教学为例 刘桑慧 管利民(41)

信 息 技 术

利用几何画板解决图形旋转问题的策略研究 张 骅 孙其芳(45)

数 学 文 化

“数学文化”选修课程的设计与思考 张 健(48)

周期函数概念的历史 韩 粟(50)

比 较 研 究

中美初中数学教材“特殊平行四边形”内容比较研究

——以浙教版、人教版和美国 MH 版教材为例 金红江(55)

解 题 方 法

结合数学思想 培养核心素养

——以解三角形中方程思想运用为例 王弟成(57)

对解析几何中定点定值问题的一些思考 宗 蕾(60)

设点与设线

——一道解析几何题的解法探究 胡骏一(62)

一 题 一 议

再探椭圆的一个定值命题的推广 李伟健 张晓建(64)

编者按:为密切编辑部与中学的联系,本刊编委第23次“走进课堂”,于2020年11月10日赴江苏省太仓市明德高级中学听课交流。太仓市明德高级中学前身为世界著名实验物理学家吴健雄之父吴仲裔先生在1913年创办的明德女子职业补习学校,校名源自《大学》中“大学之道,在明明德,在亲民,在止于至善”。2010年8月,学校和原太仓市实验高级中学整合,校名为太仓市明德高级中学。2017年5月学校晋升为江苏省四星级普通高中。学校陆续获得“江苏省文明单位”“国际生态学校绿旗单位”“江苏省科普教育基地”等荣誉称号。学校是东南大学、上海财经大学、上海外国语大学等国内著名大学的优秀生源基地。学校坚持“明德为先、文化立校、和谐发展”的办学理念,遵循“大学之道,在明明德”的校训,弘扬“爱国、求是、创新、至善”的吴健雄精神,切实转变教育观念和管理理念,努力构建多样化课程体系和多元育人模式,着力培养富有个性的创新人才。

立足数学文化 提升课堂品味

——“圆锥曲线之椭圆的定义”教学设计与反思

王瑞琦 (江苏省太仓市明德高级中学 215400)



作者简介:王瑞琦,太仓市明德高级中学教务处副主任,高二年级数学老师兼班主任。2018年获太仓市全面育人奖,2019年太仓市数学评优课获得三等奖,2020年太仓市命题比赛获得三等奖。工作七年来,以“一切为了学生,为了学生的一切”为宗旨始终站在教学第一线,教书育人,致力学生创新精神与探索能力的培养。为更好打造高效和谐课堂,努力探索、学习、研究课堂教学,深受学生喜爱。

1 基本情况分析

1.1 学情分析

本节课授课对象为太仓市明德高中高二理科普通班学生,学生具有一定的自主探究和合作能力。在日常生活中,学生对椭圆的大致形状从感性的角度有了一定的认识,但是不清楚椭圆上点满足的几何特征。本节课借助阿波罗尼奥斯压缩圆、旦德林双球模型从几何角度来研究椭圆上的点满足的几何特征。尽管学生已经学习了立体几何,但是旦德林双球模型构造巧妙、数量关系较多,所以学生不易从该模型中直接观察到椭圆上点所满足的几何特征。

1.2 内容解析

本节内容安排在选择性必修课“几何与代数”这一主题中,立足“圆锥曲线之椭圆定义”,如章引言中提到椭圆的起源,深入挖掘教材中的数学史材料,渗透数学文化,尤其是“探究与发现”中介绍的用旦德林双球证明椭圆上的点满足的几何性质。本节课从多角度探究椭圆的可操作性定义,目的是使学生对椭圆的定义形成全面的认识。

1.3 教学目标

(1)了解圆锥曲线来由,体验其中蕴含的数学文化,重点提升直观想象等核心素养;(2)经历对旦德林双球模型的探究以及动手画椭圆的过程,抽象

出椭圆的定义,重点提升逻辑推理和数学抽象等核心素养。

教学重点 抽象椭圆的模型,掌握椭圆的定义。

教学难点 用旦德林双球发现椭圆的特性,形成椭圆的定义。

1.4 课前准备

沙漏、磁性圆锥曲线截面模型、软木板、白纸、工字钉、定长细线、直尺等。

2 教学过程

2.1 问题情境,抽象圆锥曲线模型

问题1 (请几位学生上台操作)旋转锥形瓶,观察沙漏中沙子的水平面呈现什么样的图形?

(设计预想学生实验)

情形1 将沙漏放置在水平面上时,沙漏中的沙子呈现出的图形——圆形;

情形2 将沙漏稍微倾斜一定角度,沙漏中的沙子呈现出的图形——扁圆;

情形3 将沙漏的倾斜程度变大,沙漏中的沙子又会呈现出什么样的图形?

情形4 将沙漏水平放置,沙漏中的沙子呈现的图形又是怎样的?

教师引导:对于情形3和情形4两种情况,形成的曲

线很难想象,我们可以从实物模型中抽象出数学模型,使其进一步优化,方便我们研究其结构.我们可以把沙漏看成圆锥,它是通过一条直线绕着某个轴旋转出来的旋转体.而旋转出来的几何体是圆锥,直线上的点留下的轨迹就形成了圆锥面.(此处用动态图来演示)

如果拿一个垂直于圆锥的轴(或者平行于沙漏底面的平面)截圆锥面,我们可以得到一个封闭的图形——圆.把截面稍微倾斜一点角度,沙漏中的沙子仍然呈现出封闭的图形——扁圆,即椭圆(“椭”字早在创作于公元前2世纪的中国古代哲学著作《淮南子》中就有记载).将平面再倾斜,我们发现将得到不封闭的图形,很像我们之前学过的一个函数图形——抛物线.最后,我们将图形倾斜,与圆锥曲面的两边都相交,最后形成的也是一个不封闭的图形(得到两条曲线,同学们给这个曲线起个名字吧)——双曲线.(暂时命名,课后进一步研究)

师:通过模型展示,平面截圆锥面可以得到这些曲线.那么我们不妨统一起一个名字,同学们试试看?

生1:圆锥曲线.

师:圆锥曲线与科研、生产以及人类生活有着紧密的关系,开普勒就发现行星绕着太阳运行的轨迹是一个椭圆;探照灯反射镜面是抛物线绕着其对称轴旋转所成的抛物面;发电厂冷却塔的外形是双曲线.本节课我就和同学们来研究一下椭圆的定义.

2.2 数学发现,提出椭圆的直观性

师:我们来看看圆的定义:在平面内把线段 OP 绕着端点 O 旋转一周,端点 P 运动所形成的图形叫作圆,其中点 O 叫做圆心,线段 OP 叫做半径.(苏教版九年级上册第38页)

问题2 我们能否给椭圆下一个定义呢?

师:直观来看,圆与椭圆之间是否存在某种关联?

生2:直观感觉把圆压扁了就是椭圆.

师:随便压就可以得到椭圆?一个圆圈,对上半圆的两个点给不同的压力,会变成椭圆吗?

生(众):不会.

生3:对圆的每个点均匀施力.

师:均匀这个词在数学上如何体现?

生4:可以用等比例来刻画.

师:(用几何画板演示圆沿纵轴方向等比例压缩)是否可以把这个性质作为判断的依据呢?

生5:应该可以,只要比值不等于1.

师:从严谨的角度我们应该进行论证.早在公元前200年,古希腊数学家阿波罗尼奥斯就发现了椭圆的这一几何性质,他曾历经千辛万苦写出了《圆锥曲线论》,该书是古代世界光辉的科学成果,将圆锥曲线的性质网罗殆尽,几乎使后人没有插足的余地,

作者是非常了不起的一位数学家.

师:所以我们以后画椭圆,只要把每个点按照比例压缩就可以画出椭圆?

生6:太繁了!要找到很多点.

师:我们可以把这位同学说的理解为可操作性差,那么椭圆是否存在操作性强的定义?

2.3 探究与发现,给出椭圆定义

历史上,许多人从纯几何角度进行研究,下面我们再来介绍一位著名的德国数学家旦德林,他在吃冰淇淋后突然领悟(图1).下面我们看看旦德林是如何研究椭圆的定义的.

首先介绍旦德林双球模型,熟悉模型特点.研究对象是:圆锥、大球、小球、截面;它们之间关系是大球、小球均与圆锥面以及截面相切.

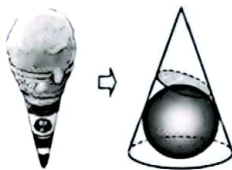


图1

问题3 球与圆锥的侧面相切,切点构成的图形是什么?切点构成的图形与圆锥底面有什么位置关系?

生7:切点构成的图形是圆,与圆锥底面的位置关系是平行.

师:回答得非常到位.

问题4 过曲线上任意一点 M 作圆锥的一条母线,使它与两个切点圆分别相交于点 P, Q ,请问 PQ 的长度会随着母线的不同而改变吗?

生8:不会.我们可以把大小球与圆锥曲面截得的图形看成一个圆台(图2),直线 PQ 正好是圆台的母线,在立体几何里我们知道圆台的母线长相等.



图2



图3

师:回答得很好!我们知道一旦椭圆对应截面确定,那么该截面与大小球的相切的切点随之确定,记为 F_1, F_2 ,那么椭圆上任意一点 M 与 F_1, F_2 两点之间又会存在怎样的关系(图3)?

要回答上述问题,我们先观察图4,类比圆的一些性质来先思考下面几个问题:

问题5 当球与平面相切时,在相切平面内过切点 F 任作一直线,它和球会有怎样的位置关系?(相切)

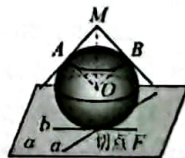


图4

问题6 那么过球外一点 M 作球的两条切线,可以作出几条?切线长是否相等?

生9:可以作无数条切线,根据全等三角形,这无数条切线均相等.

师:根据以上思考,椭圆上任意一点 M 与 F_1 , F_2 两点之间又会存在怎样的关系?

生10:因为 $MF_1 = MP$, $MF_2 = MQ$,且 $MP + MQ = PQ$, PQ 为定长,所以 $MF_1 + MF_2 = PQ$ (图5).

师:总结得非常棒!那么你可以用文字语言来表述你所得到的结论吗?

生10:一个点到两个定点的距离之和为定值.

师:这个点在哪里?

生10:在椭圆上!

师:在图5中的椭圆上,只有点 M 满足这样的条件吗?

生:这个点可以是椭圆上的任意一点!

师:观察得非常仔细!所以我们可以得出结论:椭圆上任意一点到两个定点的距离之和为定值.那么请同学们思考这样一个问题:平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和为定长的点所画出来的图形一定是椭圆吗?

师生协作,拿出事先准备好的软木板进行操作:

①将细线固定在两个工字钉上;②将两个工字钉钉在软木板上;③用笔尖把绳子拉紧并移动.

师:画出的图形是什么?

生11:是椭圆!

生12:是线段!

师:为什么有的组画出的是椭圆,有的是线段呢?

生13:两定点的距离要比定长的距离短才能画出椭圆,否则画不出来!

师:这位同学不仅观察入微,反应也很快,回答得非常好!所以我们可以完善椭圆的定义了,哪位同学愿意来描述下?

生14:平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于定值(大于 F_1, F_2 之间的距离)的点的轨迹叫做椭圆.

师:得到椭圆定义以后,我们为了在现实生活中更好地应用这样的图形,还要进一步去研究它,同学们可以在课后结合圆形的研究,思考下你可以从怎样的角度去研究这个图形.

2.4 课堂小结(略)

3 教学感悟

3.1 立足于基础,有序推进概念教学

数学概念在高中数学学习中有着基础性的作用,但实际教学中正是因为这种基础性,往往使得数

学概念的教学被简化,这种急于求成的教学心理背后隐藏着对数学概念教学重要性的漠视.数学教师在教学时必须思考数学概念如何生成及其功能定位,必须加强数学概念的研究,渗透数学概念背后的数学文化.

3.2 立足于研究,多维度看待问题

高中数学教学需要突破以往的知识教学,重视学生思维能力与智力方面的培养,使其具备多维度看问题的能力,进而实现高中生综合素质的全面发展.本节课在探索椭圆概念时并未开门见山地使用且德林双球模型,而是联系圆和椭圆的关系,从直观的几何特征入手和学生尝试得出椭圆概念.这样不仅有利于培养学生的数学思维,更有利于提高学生的综合素质,适应社会发展需求.

3.3 立足于学生,凸显课堂主体

尊重学生、了解学生、把握学情,一切教学开展都要从学生角度出发.处于青春期的高中生好奇心旺盛,对事物保持较高求知欲,因而课堂上教师应尽量结合教学内容使其自主探索事物发展规律.本节课通过环节设计,教师以启发为主,有效抓住了学生注意力,引发了学生的主观能动性.

3.4 立足于文化,提升课堂品味

数学史与数学教育之间的关系是数学教育的重要研究领域之一,其以喜闻乐见的形式呈现数学知识的来龙去脉,在科学严谨的数学逻辑体系中渗透丰富多彩的数学文化.本节课基于数学史、数学发展过程而开展数学教学.包括在数学概念产生的最初时期,数学家是如何一步步研究,从理论上升到实践,再从实践归结到规律、定理和公式的.关于概念的形成,有怎样振奋人心、精彩有趣的故事.在高中数学课堂中,教师要善于立足数学史、数学发展过程,讲授数学家精彩的研究史,激发学生的兴趣,引导学生投入到对概念、公式、原理的学习中.如果教师可以在教学中渗透数学文化,教学过程将变得生动有趣,教学效率也将大大提升.因此教师要善于挖掘“数学美”“数学史”等数学文化类型,更全面地实施文化教育.

3.5 立足于技术,形成有效融合

随着信息技术的发展,多媒体技术在教学中得到越来越广泛的使用,特别在探索几何问题中,适应运动变化思想给出由静到动的情境,课堂上学生通过观察、分析、推理和归纳,在其中理解问题本质.这种方式也体现了数形结合思想,并在变化的几何图形中开展灵活教学,丰富了教学内容,利于激发学生学习数学的兴趣.

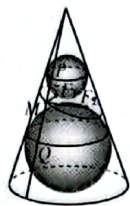


图5

(上接第 56 页)

组合作或动手操作,注重让学生通过直观感受、思考操作、合作交流等方式获取新知.拥有三版教材中最高定义深度和居中的定理深度,对学生的认知水平和新知引入要求较高,与其体验式的活动设计相辅相成.知识点深度最高,体现出了“多且深”的特点.

MH 版的知识分布较为集中,主要集中于矩形和菱形.例题和课后练习的数量是三版教材中最多的,而课内习题的数量却是最少的.知识点难度是三版中最低的,其中定义深度位居第二,定理深度最低,相对放宽了对学生逻辑演绎的要求,易于学生理解.其中,建构(CONSTRUCTION)栏目的活动设计颇具特色,将一个复杂的问题细分成多个子问题,再根据每个子问题设计相应的探究步骤,逐步搭建起解决问题的桥梁,体现出“广而浅”的特点.

4.2 建议

从几何知识体系上看,正方形是一种特殊的矩形或菱形,是矩形和菱形的下位概念,教师应注重把握先行组织者设计的原则,在上位概念的同化中学习下位概念,适当精简正方形的讲授内容,引导学生认识几何知识之间的联系,把握教学生长点,注重知识延伸点,提高教学效率,形成层次化的研究思路;正确迁移矩形、菱形的教学方式和思想方法,采用整体性教学设计,掌握研究几何图形的基本路径,体现数学的整体性,把握逻辑的连贯性,重视思维的迁移性和思考方法的普适性.

从栏目设计的形式上看,人教版的思考多为一个引导性问题,而浙教版的合作学习和 MH 版

的建构则涉及一定的现实情境,要求小组合作交流或动手操作.相较而言,人教版缺乏让学生通过直观感受、操作对比、合作交流等方式获取新知的体验过程,因此在使用人教版教材教学时可借鉴浙教版和 MH 版中的活动设计,使教学的活动设计更具多样性,从而调动学生学习的积极性,提高学生课堂学习的参与度.

国内两个版本教材中特殊平行四边形的知识点深度显著高于美国 MH 版教材,在不考虑两国初中生认知水平存在显著差异的情况下,人教版和浙教版教材在特殊平行四边形部分对学生提出了更高的要求.因此在教学过程中,教学环节的设计应当具备合理的难度梯度,优化知识的呈现方式,做到由浅入深、循序渐进.

参考文献

- [1] Dossey J A, McCrone S S, Halvorsen K T. Mathematics education in the United States 2016: a capsule summary fact book[J]. National Council of Teachers of Mathematics, 2016(6): 32-34.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育教科书·数学(八年级下册)[M]. 北京:人民教育出版社, 2014: 58, 52-64.
- [3] 范良火. 义务教育教科书·数学(八年级下册)[M]. 杭州:浙江教育出版社, 2012: 126, 114-130.
- [4] Boyd C J, Cummins J, Malloy C, Carter J, Flores A. Glencoe Mathematics Geometry[M]. New York: McGraw-Hill, 2008: 348, 340-354.
- [5] 王建波, 曹一鸣. 中美澳初中数学教材统计内容比较研究[J]. 数学教育学报, 2016, 25(3): 14-15.

中学数学月刊

1978 年 7 月创刊

2021 年第 5 期(总第 456 期)

2021 年 5 月 15 日出版

主办单位	苏州大学	协办单位	江苏省数学学会
主管单位	江苏省教育厅		
出版单位	中学数学月刊编辑部(邮编:215006)		
投稿网址	http://zxsxyk.math.suda.edu.cn		
印刷单位	苏州文星印刷有限公司		
主 编	徐稼红	发 行	江苏省邮政公司
责任编辑	邱尔依	订 阅	全国各地邮局

ISSN 1004-1176



9 771004 117216



中国标准 ISSN 1004-1176
连续出版物号 CN 32-1444/O1

发行范围 公开
报刊代号 28-75
定 价 7.00 元